Resolución Parcial Análisis Matemático I - Tema 1 - 16/06/2017

1. a) Resolver

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (sen(x))^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$$

Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. Debemos asumir que existe el límite, y luego aplicar logaritmo en ambos lados de la igualdad,

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (sen(x))^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}} \Longrightarrow \ln(L) = \ln\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (sen(x))^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}\right) \\
\ln(L) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln\left((sen(x))^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}\right) \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}} . \ln(sen(x))\right] \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(sen(x))}{x-\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

Si calculamos el límite queda una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ entonces podemos aplicar la Regla de L´Höpital,

$$\begin{aligned}
\ln(L) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\ln(sen(x)))'}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)'} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{sen(x)} . \cos(x)}{1} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{sen(x)} = \frac{0}{1} = 0
\end{aligned}$$

entonces nos queda que $\ln(L) = 0$ y luego $L = e^0 = 1$, con lo cual

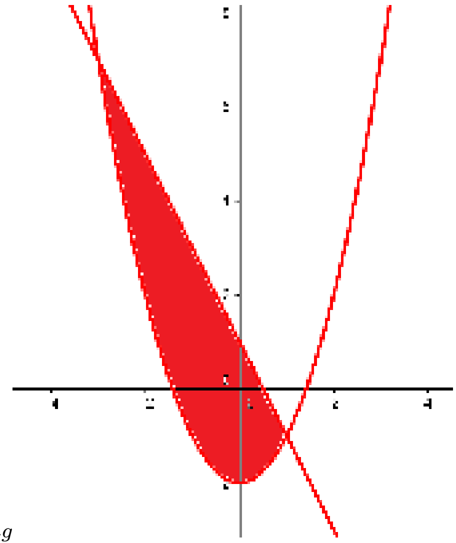
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (sen(x))^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}} = 1$$

b) Hallar el área entre

$$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$$

Podemos hacer el grafico de ambas funciones para ver el área encerrada.

area



1.*png*

Luego, encontramos los puntos de intersección de ambas curvas, igualando ambas funciones

$$\begin{aligned}
-2x+1 &= x^2-2 \\
0 &= x^2-2+2x-1 \\
0 &= x^2+2x-3 \\
0 &= (x-1)(x+3)
\end{aligned}$$

Entonces podemos escribir el área por la siguiente integral definida

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-3}^{1}\left[-2x+1-\left(x^2-2\right)\right]dx = \int_{-3}^{1}(-2x-x^2+3)dx \\
&= \left.(-x^2-\frac{x^3}{3}+3x)\right|_{-3}^{1} \text{ integramos y evaluamos en los límites superior e inferior} \\
&= \left(-1^2-\frac{1^3}{3}+3.1\right)-\left(-(-3)^2-\frac{(-3)^3}{3}+3.(-3)\right) \\
&= \left(-1-\frac{1}{3}+3\right)-(-9+9-9) \\
&= \frac{5}{3}+9=\frac{32}{3} \text{ u.a}
\end{aligned}$$

2. a) Dada la función $f(x)=\frac{2}{x^2-5}$. Estudiar dominio, intervalos de crecimietno y decrecimiento, asíntotas, máximos y/o mínimos.

   Comenzamos analizando el dominio de la función. Tenemos que excluir los valores que anulan el denominador, que son $x=-\sqrt{5}$ y $x=\sqrt{5}$. Por lo tanto, $Dom(f)=\mathbb{R}-\left\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\right\}$. Para analizar las asíntotas tanto verticales como horizontales, debemos calcular límites,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\sqrt{5}}\frac{2}{x^2-5} &= \infty \text{ por lo tanto } x=-\sqrt{5} \text{ es Asíntota Vertical} \\
\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{2}{x^2-5} &= \infty \text{ por lo tanto } x=\sqrt{5} \text{ es Asíntota Vertical} \\
\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2-5} &= 0 \text{ por lo tanto } y=0 \text{ es Asíntota Horizontal}
\end{aligned}$$

Para analizar los intervalos de crecimiento y decrecimiento debemos realizar la primer derivada de la función f

$$f'(x) = \frac{0.(x^2-5)-2.2x}{(x^2-5)^2} = \frac{-4x}{(x^2-5)^2}$$

Igualamos la expresión a 0 para obtener los puntos críticos

$$\frac{-4x}{(x^2-5)^2} = 0 \Longrightarrow -4x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Entonces tenemos los siguientes intervalos para analizar si la función crece o decrece

$$\begin{aligned}
\left(-\infty,-\sqrt{5}\right), f'(-3) &> 0 \text{ entonces la función crece en ese intervalo} \\
\left(-\sqrt{5},0\right), f'(-1) &> 0 \text{ entonces la función crece en ese intervalo} \\
\left(0,\sqrt{5}\right), f'(1) &< 0 \text{ entonces la función decrece en ese intervalo} \\
\left(\sqrt{5},+\infty\right), f'(3) &< 0 \text{ entonces la función decrece en ese intervalo}
\end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned}
\text{Intervalos de decreciemiento} &: \left(0,\sqrt{5}\right) \cup (\sqrt{5},+\infty) \\
\text{Intervalos de creciemiento} &: \left(-\infty,-\sqrt{5}\right) \cup \left(-\sqrt{5},0\right)
\end{aligned}$$

Como la función crece en $\left(-\sqrt{5},0\right)$ y luego decrece en $\left(0,\sqrt{5}\right)$, podemos afirmar que el punto crítico en $x=0$ es un máximo, es decir $MAX = (0, f(0)) = \left(0,-\frac{2}{5}\right)$

b) Demostrar que toda función derivable es continua.

Como por hipótesis tenemos que f es una función derivable en x_0, entonces existe el siguiente limite:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

Para probar que la función f es continua en x_0 mostremos que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Así

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} [f(x)-f(x_0)] &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \lim_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x_0) \lim_{x\to x_0}(x-x_0) \\
&= f'(x_0)0 = 0
\end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)-f(x_0)] = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} f(x_0) = 0 \Longrightarrow$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x_0) \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

3. a) Estudiar la convergencia o divergencia de la siguiente serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3+5n}{n^5-2n^2}$.Justificar

Aplicamos el criterio del paso al límite que dice: si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = s > 0$, ambas series $\sum b_n$ y $\sum a_n$ se comportan igual, ambas divergen o convergen.

Siendo $a_n = \frac{3n^3+5n}{n^5-2n^2}$ debemos elegir a $b_n = \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge por criterio de serie armónica generalizada $\sum \frac{1}{n^p}$ con $p > 1$, luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^3+5n}{n^5-2n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^5+5n^3}{n^5-2n^2} = 3 > 0$$

Por consiguiente la serie dada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3+5n}{n^5-2n^2}$ converge.

b) Estudiar si la sucesión $a_n = \frac{5n+1}{2n}$es monótona.

Una sucesión es monótona si:

$$\begin{array}{ccc} \text{decreciente} & a_{n+1} < a_n & \text{o equivalentemente } \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \\ \text{creciente} & a_{n+1} > a_n & \text{o equivalentemente } \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \end{array}$$

luego,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{5(n+1)+1}{2(n+1)}}{\frac{5n+1}{2n}} = \frac{(5n+6).2n}{(2n+2).(5n+1)} = \frac{10n^2+12n}{10n^2+12n+2} \\ &= \frac{10n^2+12n+2-2}{10n^2+12n+2} = \frac{10n^2+12n+2}{10n^2+12n+2} - \frac{2}{10n^2+12n+2} \\ &= 1 - \frac{2}{10n^2+12n+2} < 1, \text{ ya que } 0 < \frac{2}{10n^2+12n+2} < 1 \end{aligned}$$

Entonces $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ por consiguiente la sucesión es monótona decreciente.

4. a) Aplicar la definición de límite de funciones y encontrar la relación entre δ y ϵ tal que $\lim_{x\to 2} \frac{3x-1}{x+1} = \frac{5}{3}$.

Primero debemos escribir la definición de límite

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x-1}{x+1} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists\delta(\epsilon) > 0 : si\ 0 < |x-2| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{3x-1}{x+1} - \frac{5}{3}\right| < \epsilon$$

Partimos de

$$\begin{aligned} \left|\frac{3x-1}{x+1} - \frac{5}{3}\right| &= \left|\frac{(3x-1)\,3-5\,(x+1)}{3\,(x+1)}\right| = \left|\frac{9x-3-5x-5}{3\,(x+1)}\right| \\ &= \left|\frac{4x-8}{3\,(x+1)}\right| = \left|\frac{4(x-2)}{3\,(x+1)}\right| = \frac{|4|\,|x-2|}{|3|\,|x+1|} = \frac{4}{3}\,|x-2|\,\frac{1}{|x+1|} \end{aligned}$$

Como sabemos que $|x-2| < \delta$, nos queda acotar el término $\frac{1}{|x+1|}$. Para eso elegimos un $\delta = 1$ entonces

$$\begin{aligned} |x-2| &< 1 \Leftrightarrow -1 < x-2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3 \\ 2 &< x+1 < 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{|x+1|} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Entonces

$$\left|\frac{3x-1}{x+1}-\frac{5}{3}\right| = \frac{4}{3}|x-2|\frac{1}{|x+1|} < \frac{4}{3}\delta\frac{1}{2} = \frac{2}{3}\delta < \epsilon$$

de donde $\delta < \frac{3}{2}\epsilon$. Solo nos queda tomar δ como el mínimo entre los dos valores obtenidos, es decir, $\delta = \min\left\{1, \frac{3}{2}\epsilon\right\}$

b) Encontrar el valor de a y b para que la función sea continua en 1 y 2

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \quad x < 1 \\ x+b & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ ax & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Comenzamos a analizar la continuidad en $x = 1$.

i) $f(1) = 1 + b$

ii) Para analizar $\lim_{x\to 1} f(x)$ debemos resolver los límites laterales

$$\left.\begin{array}{c} \lim_{x\to 1^+} x+b = 1+b \\ \lim_{x\to 1^-} 2x+1 = 3 \end{array}\right\} 1+b = 3 \Longrightarrow b = 2$$

Luego analizamos la continuidad en $x = 2$

i) $f(2) = 2 + b = 2 + 2 = 4$

ii) Para analizar $\lim_{x\to 2} f(x)$ debemos resolver los límites laterales

$$\left.\begin{array}{c} \lim_{x\to 2^+} ax = 2a \\ \lim_{x\to 2^-} x+b = 2+2 = 4 \end{array}\right\} 2a = 4 \Longrightarrow a = \frac{4}{2} = 2$$

Entonces para que la función sea continua en $x = 1$ y $x = 2$ los valores de a y b deben ser $a = 2$ y $b = 2$

5. a) Dada $f(x) = \frac{1}{x+5} + 3x$, ¿existe algún $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$? Justificar y enunciar el teorema aplicado.

Para poder aplicar el Teorema de Bolzano, debo verificar que la hipótesis de continuidad se verifica. f es suma de dos funciones

$$f(x) = g(x) + h(x) \Longrightarrow g(x) = \frac{1}{x+5} \text{ y } h(x) = 3x$$

La función $h(x) = 3x$ es continua $\forall x \in \mathbb{R}$ porque es una función polinómica, de grado 1, en particular es continua en el intervalo $(-1, 1)$. La función $g(x) = \frac{1}{x+5}$ es una función racional con $Dom(g) = \mathbb{R} - \{-5\}$. Como el valor que anula el denominador no se encuentra en el intervalo $(-1, 1)$, podemos afirmar que la función g es continua en $(-1, 1)$. Como la suma de funciones continuas es continuas, podemos asegurar que la función f es continua en $(-1, 1)$.

Como además se verifica que $f(-1) < 0$ y $f(1) > 0$, por el Teorema de Bolzano existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, $\frac{1}{c+5} + 3c = 0$.

b) Demostrar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converja significa que la sucesión de sumas parciales $(S_n)_{n\geq 1}$ converge, o sea existe $\lim\limits_{n\,\to\,\infty} S_n = S$.

Escribimos la sucesión de sumas parciales $(S_n)_{n\geq 1}$ y también $(S_{n-1})_{n\geq 1}$

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \ \dots\ a_{n-1} + a_n \\ S_{n-1} &= a_1 + a_2 + \ \dots\ + a_{n-1} \\ S_n - S_{n-1} &= a_n \end{aligned}$$

Por la unicidad del límite,

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_n$$

analizando el primer término ,

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$

usando el hecho de que el limite de una resta es igual a la resta de los limites, porque cada limite existe, y además por la unicidad del límite, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} &= \lim_{n\to\infty} a_n \\ S - S &= \lim_{n\to\infty} a_n \\ 0 &= \lim_{n\to\infty} a_n \end{aligned}$$

con lo cual tenemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.